Τέταρτο διαγώνισμα στις Διαφορικές Εξισώσεις

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 90 Λεπτά

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

Θέμα 1

Να αποδείξετε ότι το π.α.τ

$$y' = 1 + y + y^2 \cos x,\ y(0) = 0$$

έχει μοναδική λύση στο διάστημα $I = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$. Μπορεί αυτή η λύση να επεκταθεί σε ένα μεγαλύτερο διάστημα;

Θέμα 2

Να αποδείξετε ότι το π.α.τ

$$y' = y\log(1 + |x|) + e^{-x}\log(1 + y^2),\ y(0) = 0$$

έχει ακριβώς μία λύση στην πραγματική ευθεία.

Θέμα 3

Θεωρούμε το π.α.τ

$$y' = x\sqrt{y-3},\ y(0) = a,\ x \in \mathbb{R}$$

Να εξετάσετε το παραπάνω π.α.τ ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο των λύσεων αν

(i) $a = 3$

(ii) $a = 4$

Εξετάστε αν η συνάρτηση $f(x,y) = x\sqrt{y-3}$ είναι Lipschitz σε κάποιο σύνολο της μορφής

$$R = \{(x,y) : |x| \leq \alpha, |y-3| \leq b\},$$

όπου $\alpha, b > 0$. Σχολιάστε πως το συμπέρασμα αυτό επηρεάζει την (i).

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Τέταρτο Διαγώνισμα (Απαντήσεις)

ΘΕΜΑ 1:

Θεωρούμε $f(x,y) = 1 + y + y^2 \cos x \quad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

και ορίζουμε το χωρίο:

$$R = \left\{ (x,y) : |x| \leq \frac{1}{4} \text{ και } |y| \leq \beta \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

για κάθε $\beta > 0$. f συνεχής στο R.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 + 2y\cos x$ συνεχής στο R

$$\xRightarrow{R \text{ συμπαγ.}} \exists \; K := \max_{(x,y)\in R} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| = 1 + 2\beta$$

Άρα, η f είναι K-Lipschitz στο R.

Επομένως, $\exists !$ y λύση του εν λόγω π.α.τ

ορισμένη στο $[-r, r]$, $r = \min\left\{ \frac{1}{4}, \frac{\beta}{M} \right\}$, όπου

$$M = \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)| = 1 + \beta + \beta^2.$$

$$r = \min\left\{ \frac{1}{4}, \frac{\beta}{1+\beta+\beta^2} \right\}.$$ Για την επιλογή του β:

$$\frac{1}{4} \leq \frac{\beta}{1+\beta+\beta^2} \Leftrightarrow 1+\beta+\beta^2 = 4\beta \Leftrightarrow$$

$$1 - 3\beta + \beta^2 = 0.$$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 = 5 > 0.$$

$$\beta_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Για $\beta = \beta_1 = \frac{2+\sqrt{5}}{2}$, το $r = \frac{1}{4}$.

Τώρα, θα προσδιορίσουμε το μέγιστο r

Το παραπάνω θεώρημα που εφαρμόσαμε ικανοποιείται και για ένα χωρίο:

$\tilde{R} = \{(x,y) : |x| \leq \alpha,\ |y| \leq \beta\} \subseteq \mathbb{R}^2$, για κάθε $\alpha, \beta > 0$.

Οπότε, η λύση y ορίζεται στο $[-r, r]$

όπου $$r = \min\left\{ a, \frac{\beta}{1+\beta+\beta^2} \right\}$$

Θέτουμε $$g(\beta) = \frac{\beta}{1+\beta+\beta^2}, \quad \beta>0$$

$$g'(\beta) = \frac{1+\beta+\beta^2 - \beta(1+2\beta)}{(1+\beta+\beta^2)^2}$$

$$= \frac{1-\beta^2}{(1+\beta+\beta^2)^2} = 0 \Rightarrow \beta = \pm 1$$

$$\overset{\beta>0}{\Longrightarrow} \beta = 1.$$

β	0		1		$+\infty$
$g'(\beta)$		$+$	0	$-$	
$g(\beta)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

$$g(1) = \max_{\beta>0} g(\beta) = \frac{1}{3}.$$

Οπότε, $$r(a) = \min\left\{ a, \frac{1}{3} \right\}.$$

Για $a \geq \frac{1}{3}$, υπάρχει λύση στο $J = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε $f(x,y) = y\log(1+|x|) + e^{-x}\cdot\log(1+y^2)$,

$(x,y)\in\mathbb{R}^2$, που ορίζουμε το $I=\mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής στο χωρίο

$E=\{(x,y):\ x\in I,\ y\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^2$.

Επίσης, για κάθε J συμπαγές $\subseteq I$

η συνάρτηση f είναι k-Lipschitz

στο $E_J=\{(x,y):\ x\in J,\ y\in\mathbb{R}\}$, γιατί

$\forall\,(x,y)\in J\times\mathbb{R}$ έχουμε:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq |y|\cdot\log(1+|x|) + e^{-x}\cdot\frac{2|y|}{1+y^2} \quad (1)$$

Επίσης, $\dfrac{2|y|}{1+y^2}\leq 1 \iff 2|y|\leq 1+|y|^2$

$$\Leftrightarrow \quad |y|^2-2|y|+1 \geq 0 \Leftrightarrow (|y|-1)^2 \geq 0$$

που ισχύει $\forall y \in \mathbb{R}$.

Άρα, η (1) γίνεται:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq \log(1+|x|) + e^{-x} = g(x)$$

όπου g συνεχής στο $J \xrightarrow{J \text{ συμπαγές}}$

$$\exists \ M_J := \max_{x \in J} g(x).$$

Άρα, η f είναι M_J-Lipschitz

στο E_J. Οπότε, $\exists!$ y λύση

του π.α.τ που να ορίζεται στο

$I = \mathbb{R}$.

Θεμα 3

$$y' = x\sqrt{y-3}\ , \quad y(0)=a$$

Προκειται για μια δ.ε χωρισ. μεταβλητών

$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y-3} \overset{y\neq 3}{\Leftrightarrow} \frac{dy}{\sqrt{y-3}} = x\,dx \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y-3}} = \int x\,dx + c \Leftrightarrow$$

$$2\cdot\sqrt{y-3} = \frac{x^2}{2} + c \Leftrightarrow$$

$$4(y-3) = \left(\frac{x^2}{2}+c\right) \Leftrightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2}+c\right) + 3$$

Επίσης, η $y(x)=3$ ιδιαζουσα λύση της δ.ε.

i) Αν $a=3$, τότε μια λύση του πατ

$y(0)=3$ είναι η $y(x)=3,\ x\in\mathbb{R}$, ενώ

απ' τον γενικό τύπο λύσεων προκύπτει

άλλη μία λύση τ.ω

$$y(0)=\cancel{3}=\frac{1}{4}\left(\frac{\cancel{0^2}}{2}+c\right)+\cancel{3} \Rightarrow c=0$$

Η δευτερη λυση του πατ είναι η

$$y^*(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2}+3=\frac{x^2}{8}+3,\ x\in\mathbb{R}$$

Με άλλα λόγια το δοθεν πατ δεν έχει μοναδική λυση.

ii) Αν $a=4$, τότε η μοναδική λυση

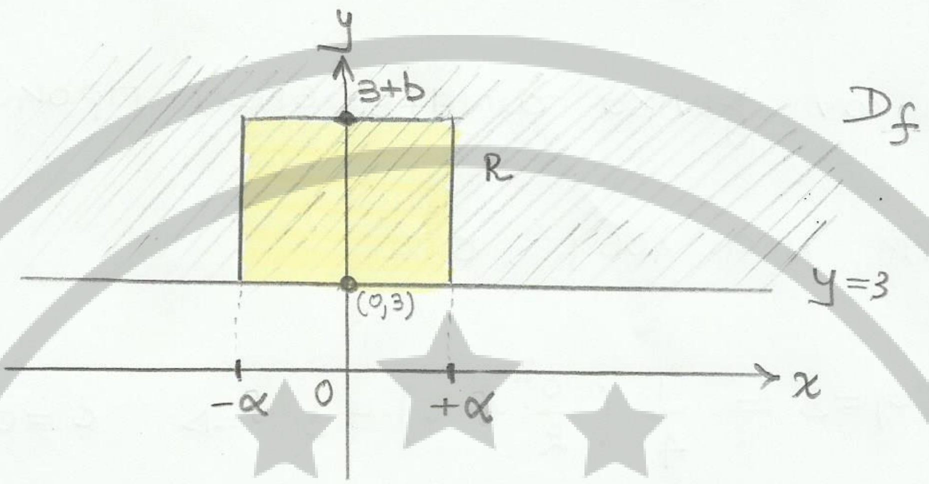
του πατ τ.ω $y(0)=4=\frac{1}{4}\left(\frac{\cancel{0^2}}{2}+c\right)+3$

$\Rightarrow c=4$, δίνεται ως:

$$y(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2}+4\right)+3,\ x\in\mathbb{R}.$$

Έστω $R=\{(x,y): |x|\le \alpha \ \& \ |y-3|\le b\}$,

με $\alpha>0$ & $b>0$, ένα τυχόν $\subseteq D_f = \mathbb{R}\times[3,+\infty)$



Θδο η $f(x,y)=x\sqrt{y-3}$, δεν είναι

Lipschitz στο R. Ας υποθέσουμε

ότι f Lipschitz στο R. Τότε, $\exists K>0$

τ.ω $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le k|y_1-y_2|$,

$\forall\ (x,y_1),(x,y_2)\in R$, ή ισοδύναμα

$|x\sqrt{y_1-3}-x\sqrt{y_2-3}|\le k|y_1-y_2|$, $\forall x\in[-\alpha,\alpha]$

και $3\le y_1,y_2\le 3+b$. Θέτουμε

$x=\alpha$, οπότε η σχέση γράφεται:

$$\left|\sqrt{y_1-3}-\sqrt{y_2-3}\right| \le \frac{k}{\alpha}|y_1-y_2| , \ \forall\ 3\le y_1,y_2\le 3+b$$

Τότε, $\forall\ 3<y_1\le 3+b$ & $3\le y_2\le 3+b$

$$\frac{|y_1-\cancel{3}-y_2+\cancel{3}|}{\sqrt{y_1-3}+\sqrt{y_2-3}} \le \frac{k}{\alpha}|y_1-y_2|$$

Αν θέσουμε τώρα $y_2=3$, τότε

$\forall\ 3<y_1\le 3+b$, έπεται:

$$\frac{\cancel{|y_1-3|}}{\sqrt{y_1-3}} \le \frac{k}{\alpha}\cancel{|y_1-3|}$$

Το οποίο ισοδύναμα δίνει:

$$\frac{1}{\sqrt{y_1-3}} \le \frac{k}{\alpha} , \ \forall\ 3<y_1\le 3+b \quad (*)$$

Αν τώρα $y_1\longrightarrow 3^+$, τότε $\frac{1}{\sqrt{y_1-3}}\longrightarrow +\infty$

και έτσι στην (*) θα έχουμε ότι: $+\infty\le\frac{k}{\alpha}$

που είναι άτοπο.

Με άλλα λόγια, το γεγονός ότι η f <u>δεν</u> μπορεί να είναι Lipschitz τοπικά στο σημείο $(0,3)$, είναι και ο λόγος για τον οποίο το π.α.τ της (i) <u>δεν</u> έχει μοναδική λύση.